Утверждены
на заседании Центральной предметно-методической комиссии
Всероссийской олимпиады школьников по математике
(протокол № 2 от 13.06.2018 г.)

Методические рекомендации по проведению школьного и муниципального этапов всероссийской олимпиады школьников в 2018/2019 учебном году по математике

Содержание

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению школьного этапа

Введение

В 2018/2019 учебном году сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы.

Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь муниципальным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения школьного этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания школьного этапа, описание подходов к разработке заданий муниципальными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы олимпиадных заданий для проведения школьного этапа олимпиады с решениями. Данные задачи предлагались на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны или включены в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для школьного этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018/2019 учебном году утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 13 июня 2018 года).

Основные задачи

Одной из важнейших задач Олимпиады на начальных этапах является развитие интереса у обучающихся к математике, формирование мотивации к систематическим занятиям математикой на кружках и факультативах, повышение качества математического образования. Важную роль здесь играет свойственное подростковому периоду стремление к состязательности, к достижению успеха. Квалифицированно составленные математические олимпиады являются соревнованиями, где в честной и объективной борьбе обучающийся может раскрыть свой интеллектуальный потенциал, соотнести свой уровень математических способностей с уровнем других учащихся школы. Кроме того, привлекательными для участников являются нестандартные условия задач, предлагаемых на олимпиадах. Они заметно отличаются от обязательных при изучении школьного материала заданий, направленных на отработку выполнения стандартных алгоритмов (например, решения квадратных уравнений), и требуют демонстрации креативности участников олимпиады. Наконец, первые олимпиадные успехи важны для самооценки учащегося, а также, в ряде случаев, изменения отношения к нему учителей, возможно недооценивавших его способности. Нередки случаи, когда способный и даже талантливый обучающийся допускает при выполнении стандартной школьной контрольной работы арифметические ошибки, либо выполняет ее с не устраивающей учителя аккуратностью.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на школьном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Школьный этап олимпиады проводится для учащихся **4-11 классов**.

Конкретные сроки и места проведения школьного этапа олимпиады по математике устанавливаются органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования. Олимпиада для учащихся всех школ муниципального образования проводится по единым заданиям, разработанным для каждой из параллелей 4-11 классов муниципальной предметно-методической комиссией, назначаемой органом местного самоуправления, осуществляющим управление в сфере образования.

В олимпиаде имеет право принимать участие **каждый обучающийся** (далее – Участник), в том числе вне зависимости от его успеваемости по предмету. Число мест в классах (кабинетах) должно обеспечивать **самостоятельное** выполнение заданий олимпиады каждым Участником. Продолжительность олимпиады должна учитывать возрастные особенности Участников, а также трудность предлагаемых заданий.

Рекомендуемое время проведения олимпиады: для 4 класса – 1-2 урока, для 5-6 классов – 2 урока, для 7-8 классов – 3 урока, для 9-11 классов – 3-4 урока.

Участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады.

После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри школьной олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным.

По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Количество победителей и призеров школьного этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором школьного этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для школьного этапа

Задания школьного этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания не должны носить характер обычной контрольной работы по различным разделам школьной математики. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным хотя бы по одному из базовых учебников по математике, алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить практически каждому ее участнику возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных

Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись не менее 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.

4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.

5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.

6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в начальном и среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 4-6 классов рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Желательно использование различных источников, неизвестных участникам Олимпиады, либо включение в варианты новых задач.

8. В задания для учащихся 4-6 классов, впервые участвующих в олимпиадах, желательно включать задачи, не требующие сложных (многоступенчатых) математических рассуждений.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных школах необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри школьного этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Описание необходимого материально-технического обеспечения для выполнения олимпиадных заданий

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать. Допускается выписывание условий заданий на доску.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуется тетрадь в клетку. Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков (**черновики не проверяются**). Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Выполнение заданий математических олимпиад не предполагает использование каких-либо справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

Тематика заданий школьного этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

IV-V КЛАССЫ

Натуральные числа и нуль.

Делители и кратные числа.

Деление с остатком.

Четность.

Текстовые задачи.

Геометрические фигуры на плоскости, измерение геометрических величин.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания, переливания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

Построение примеров и контрпримеров.

Разрезания.

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания школьного этапа олимпиады

Ниже приведены примеры типовых задач школьного этапа олимпиады с указанием примерной сложности для соответствующего класса. Задания разбиты по основным темам.

Арифметика, числовые ребусы

(4-5 класс, средняя). Восстановите пример на сложение, где цифры слагаемых заменены звездочками: ** + ** + **= 296.

Ответ. 99+99+98=296.

(4-6 класс, легкая). Найдите решение числового ребуса *AAA–AA–A*=*B*. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. 111–11–1=99.

(5-6 класс, средняя). Расставьте скобки в выражении 1 : 2 : 3 : 4 : 5 = 30 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. 1:(2:3:4:5)=30.

(7-8 класс, легкая). Расставьте скобки в левой части выражения 2 : 3 : 4 : 5 : 6 = 5 так, чтобы получилось верное равенство.

Ответ. (2:3):((4:5):6)=5.

(7-8 класс, сложная). Сколько решений имеет ребус $ABBB \times C + AC = CBAC$?

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Ответ. 8 решений.

Решение. Заметим, что цифры A и C – ненулевые. Вычтем из обоих частей равенства $\overline{AC}$. Получим $\overline{ABBB}\times C=\overline{CB00}$. Поскольку первая цифра числа $\overline{CB00}$ равна C, это возможно только в случае, когда $A=1$. Получим $\overline{1BBB}\times C=\overline{C000}+\overline{BBB}\times C=\overline{CB00}=\overline{C000}+\overline{B00}$, откуда $\overline{BBB}\times C=\overline{B00}$. Это возможно только при $B=0$. Итак, $A=1$ и $B=0$. Подставим эти значения в условие: $1000\times C+\overline{1C}=\overline{C01C}$. Это равенство выполняется при любых C. Однако разным буквам соответствуют разные цифры, поэтому $C\neq 0$ и $C\neq 1$. Осталось 8 возможностей для C. Значит, ребус имеет 8 решений.

(8 класс, средняя). Число, состоящее из *N* цифр 8 (других цифр в числе нет), умножили на число 8. Полученное произведение имеет сумму цифр, равную 1200. Найдите *N*.

Ответ. 1191.

Решение. Перемножив числа в столбик, получим результат: 7111…11104. В этом числе *N*–2 единицы. А сумма его цифр равна $7+(N-2)+4=1200$, откуда *N*=1191.

(8 класс, средняя). Найдите какое-нибудь натуральное число, произведение цифр которого на 50 больше суммы его цифр.

Ответ. Например, 9811111.

Разрезания

(4-6 класс, средняя). Разрежьте угол 8×8 на уголки из трех клеток (см. рис. 1).

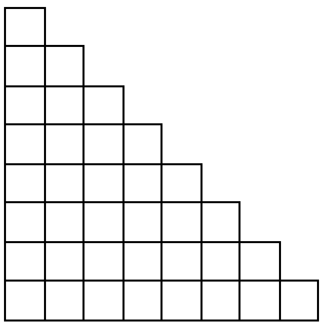

Рис. 1

Решение. Одно из возможных решений показано на рис. 2.

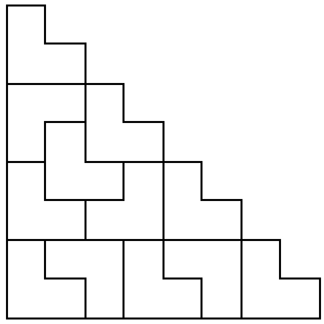

Рис. 2

(7-8 класс, средняя). Разрежьте квадрат 3×3 на две части и квадрат 4×4 на две части так, чтобы из полученных четырех кусков можно было сложить квадрат.

Решение. Два возможных варианта показаны на рис. 3.

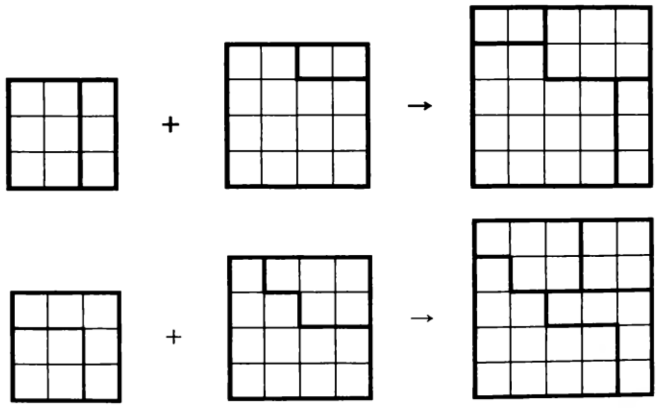

Рис. 3

Текстовые задачи

(4-5 класс, легкая). На листе бумаги нарисованы квадрат и прямоугольник. Квадрат имеет площадь 25 см^2. Одна из сторон прямоугольника на 1 см больше стороны квадрата, а другая сторона на 2 см меньше стороны квадрата. Найдите площадь этого прямоугольника.

Ответ. 18 см^2.

(6-7 класс, средняя). Петя сказал, что у него братьев и сестер поровну, а Маша сказала, что у нее братьев в три раза больше, чем сестер. Сколько детей в семье, если Маша и Петя – брат и сестра?

Ответ. 5 детей (3 брата и 2 сестры).

Решение. Пусть сестер в семье x. Тогда из ответа Пети следует, что братьев в семье x+1. Теперь из ответа Маши получаем уравнение $x+1=3(x-1)$, откуда $x=2$.

(5-7 класс, средняя). У Карлсона в шкафу стоят 5 банок малинового, 8 банок земляничного, 10 банок вишневого и 25 банок клубничного варенья. Может ли Карлсон съесть все варенье, если каждый день он хочет съедать 2 банки варенья, при этом обязательно из разных ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Каждую банку клубничного варенья Карлсон съедает вместе с какой-то из 5 + 8 + 10 = 23 банок другого варенья. Значит, он съест не более 23 банок клубничного варенья и все варенье съесть не сможет.

(5-7 класс, средняя). В ящике 25 кг гвоздей. Как с помощью чашечных весов и одной гири в 1 кг за два взвешивания отмерить 19 кг гвоздей?

Решение. При первом взвешивании в одну из чашек весов кладем гирю и все гвозди раскладываем по чашкам так, чтобы установилось равновесие. Получим 13 и 12 кг гвоздей. Первую кучку откладываем, а остальные гвозди делим пополам, взвешивая без гири: 12=6+6. Получили искомое количество гвоздей: 19=13+6.

(5-7 класс, средняя). На прямой через равные промежутки поставили сто точек, и они заняли отрезок длины a. Затем на прямой через такие же промежутки поставили десять тысяч точек, и они заняли отрезок длины b. Во сколько раз b больше a?

Ответ. В 101 раз.

Решение. Обозначим длину промежутка за x. Сто точек делят отрезок длины a на 99 промежутков, а 10000 точек делят отрезок длины b на 9999 промежутков. Поэтому a=99x, b=9999x и b=101a.

(6-7 класс, средняя). К новогоднему празднику школа покупает каждому ученику по шоколадке. известно, что если покупать шоколад в упаковках по 20 шоколадок в каждой, то понадобится на 5 упаковок больше, чем упаковок по 24 шоколадки. Сколько учеников в школе?

Ответ. 600.

(7-8 класс, средняя). Три ученика *A, B* и *C* участвовали в беге на 100 м. Когда *A* прибежал на финиш, *B* был позади него на 10 м, также, когда *B* финишировал, *C* был позади него на 10 м. На сколько метров на финише *A* опередил *C*?

Ответ. На 19 метров.

Решение. Скорость B составляет 0,9 от скорости A, а скорость C составляет 0,9 от скорости B, т.е. 0,81 от скорости A.

(7-8 класс, средняя). Определите, чему равен угол между часовой и минутной стрелками часов в 23 часа 45 минут.

Ответ. 82,5°.

Решение. Угол между минутной стрелкой и «12» равен 90°, а между часовой и «12» равен четверти от угла между «11» и «12», т.е. равен $\frac{1}{4}\cdot\frac{360°}{12}=7,5°$.

(8-9 класс, средняя). Поезд, двигаясь с постоянной скоростью, к 17.00 проехал в 1,25 раза больший путь, чем к 16.00. Когда поезд выехал?

Ответ. В 12.00.

Решение. За 1 час от 16.00 до 17.00 поезд проехал 0,25 пути с момента выезда до 16.00. Значит, он ехал 4 часа и выехал в 12.00.

(7-8 класс, средняя). Два автомобиля, находящиеся на расстоянии S км друг от друга, движутся навстречу друг другу. Скорость первого автомобиля v_1 км/ч, второго – v_2 км/ч. Через какое время они снова окажутся на расстоянии S км друг от друга?

Ответ. $\frac{2S}{v_1+v_2}$.

Решение. Автомобили встретятся через $\frac{S}{v_1+v_2}$ ч. Поэтому через такое же время после момента встречи расстояние между ними снова станет равно S.

(7-8 класс, средняя). В два киоска поступил товар по одинаковой цене. Через неделю в первом киоске все цены были снижены на 10%, а еще через неделю – подняты на 20%. Во втором киоске через две недели цены были увеличены на 10%. В каком киоске через две недели после поступления товара цены ниже?

Ответ. В первом киоске.

Решение. Если x – начальная цена товара, то его конечная цена в первом киоске – $x\cdot\frac{90}{100}\cdot\frac{120}{100}=1,08x$, а во втором – $x\cdot\frac{110}{100}=1,1x$.

(6-7 класс, сложная). У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше) чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 3 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 5 кг. Когда взвесили и арбуз, и дыню, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гирю в 2 кг?

Ответ. 3 кг.

Решение. На сумму 3 + 5 = 8 кг сдвиг стрелки влияет дважды, а на вес 7 кг – только один раз. Поэтому сдвиг стрелки равен 8 – 7 = 1 кг. Следовательно, правильный вес на 1 кг меньше, чем показывают весы. Значит, если на весы поставить гирю в 2 кг, то они покажут 3 кг.

(9-11 класс, средняя). По круговой дороге велодрома едут два велосипедиста с неизменными скоростями. Когда они едут в противоположенных направлениях, то встречаются каждые 10 секунд, когда же они едут в одном направлении, то один настигает другого каждые 170 секунд. Какова скорость каждого велосипедиста, если длина круговой дороги 170 метров?

Ответ. 9 м/с и 8 м/с.

Решение. Пусть скорости велосипедистов равны x м/с и y м/с ($x > y$). Тогда $10(x+y)=170$ и $170(x-y)=170$. Отсюда находим x = 9 м/с и y = 8 м/с.

Логические задачи

(6-7 класс, сложная). На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду и лжецы, которые всегда лгут. Встретились три островитянина: Петя, Вася и Толя. Петя сказал: "Мы все лжецы". Вася на это ему ответил: "Нет, только ты". Может ли Толя быть лжецом?

Ответ. Не может.

Решение. Если Толя лжец, то и Вася лжец. Но тогда Петя не может быть ни лжецом (так как он тогда бы сказал правду), ни рыцарем (так как он тогда бы солгал). Значит, Толя не может быть лжецом.

(5-6 класс, средняя). К Васе пришли его одноклассники. Мать Васи спросила у него, сколько пришло гостей. Вася ответил: «Больше шести», а стоявшая рядом сестренка сказала: «Больше пяти». Сколько было гостей, если известно, что один ответ верный, а другой нет?

Ответ. 6.

Решение. Допустим, что гостей действительно больше шести. Тогда правы и Вася, и его сестра, а это противоречит условию задачи. Значит, гостей не больше шести, и Вася неправ. Но тогда должна быть права сестра, иначе снова нарушится условие задачи. Значит, гостей больше пяти. Но если их больше пяти и не больше шести, то их ровно шесть.

(6-7 класс, сложная). Одиннадцать шестиклассников встали в круг. Они договорились, что некоторые из них всегда говорят правду, а все другие – всегда лгут. Каждому из них раздали по две карточки, и каждый сказал: «У меня карточки одного цвета». После этого каждый передал обе свои карточки своему соседу справа. Могли ли они все после этого сказать: «У меня теперь карточки разных цветов»?

Ответ. Не могли.

Рассмотрим двух шестиклассников, стоящих рядом. Про карточки, которые правый из них (П) получил от левого (Л), они дали разные ответы. Значит, один из них говорит правду, а другой – лжет. Пусть следующий по кругу за П – шестиклассник К. Тогда в паре П – К также один говорит правду, а другой – лжет. И так далее. Значит, говорящие правду и ложь – чередуются. Поэтому их должно быть четное количество.

(9-11 класс, средняя). В мешке лежат 26 синих и красных шаров. Среди любых 18 шаров есть хотя бы один синий, а среди любых 10 шаров есть хотя бы один красный. Сколько красных шаров в мешке?

Ответ. 17.

Решение. Так как из 18 шаров найдется хотя бы один синий, то красных не более 17, а из любых 10 шаров найдется хотя бы один красный, то есть синих не более 9. Так как всех шаров 26, то синих – 9, а красных – 17.

Четность

(7-8 класс, сложная). Вдоль забора растут 10 кустов смородины. Число ягод на соседних кустах отличается на 1. Может ли на всех кустах вместе быть 1000 ягод?

Ответ. Не может.

Решение. Число ягод на двух соседних кустах отличается на 1, поэтому на двух соседних кустах вместе нечетное число ягод. Тогда количество ягод на десяти кустах равно сумме пяти нечетных чисел, т.е. числу нечетному. Значит, на всех кустах вместе не может быть 1000 ягод.

(6-7 класс, сложная). В 6Б классе обучаются 20 учеников. В первой четверти они по трое дежурили по классу. Могло ли так получиться, что в некоторый момент каждый из учеников отдежурил с каждым ровно по одному разу?

Ответ: Не могло.

Решение. Предположим, что такое возможно. Рассмотрим любого ученика. В первое свое дежурство он отдежурил с двумя одноклассниками. Во второе – с двумя другими и т. д. Так как у него 19 одноклассников (нечетное число), то после девятого его дежурства останется ровно один одноклассник, с которым он не отдежурил. Полученное противоречие завершает доказательство.

(6-7 класс, сложная). Два натуральных числа в сумме дают 1001. Вася увеличил каждое из них на 25 и перемножил полученные числа. Он получил, что произведение также оканчивается на 1001. Докажите, что Вася ошибся.

Решение. Если сумма двух натуральных числе равна 1001, то одно из них четное, а другое нечетное. Если к четному числу прибавить 25, получится нечетное число. Аналогично, если к нечетному числу прибавить 25, получится четное число. А произведение четного и нечетного чисел должно быть числом четным и поэтому не может оканчиваться на 1001.

(6-7 класс, средняя). Сумма пяти чисел равна 200. Докажите, что их произведение не может оканчиваться на 1999.

Решение. Произведение чисел нечетно, следовательно, все пять чисел нечетны, и их сумма также должна быть нечетной.

(5-7 класс, сложная). В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 30, а Вася – 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ.

Ответ. Коля.

Решение. После каждого забега все присутствующие на уроке школьники получают нечётное количество конфет. Поэтому чётность количества полученных конфет у ребят, посетивших все уроки, должна быть одинаковой. Но из трёх чисел 29, 30, 33 первое и третье – нечётные, а второе – чётное. Значит, пропустил урок тот, у кого чётное количество заработанных конфет.

(8-9 класс, трудная). Грани игрального кубика занумерованы числами от 1 до 6. Петя сложил из восьми игральных кубиков куб вдвое большего размера так, что числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы. Может ли сумма всех 24 чисел, написанных на поверхности сложенного Петей куба, равняться 99?

Ответ. Не может.

Решение. Сумма всех чисел, записанных на гранях этих восьми игральных кубиков равна четному числу ($8 \cdot 21$). Так как числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы, то они все числа внутри большого куба разбиваются на пары одинаковых. То есть сумма всех чисел внутри большого куба четна. Значит, и сумма всех чисел на поверхности большого куба также должна быть четной (как разность четных чисел) и не может равняться 99.

Делимость

(6-7 класс, легкая). Запишите числа 1, 2, 3, 4, 6, 8, 9 в строку так, чтобы из любых двух соседних чисел одно делилось бы на другое.

Ответ. Например, 9, 3, 6, 2, 4, 8, 1.

(5-6 класс, средняя). Каждое из двух чисел не делится на 10. Их произведение равно 1000. А чему может равняться их сумма?

Ответ. 133=125+8.

(6-7 класс, легкая). Придумайте девятизначное число, у которого по крайней мере три разные цифры, и которое делится на каждую из них.

Ответ. Например, число 111111124 (делится на 1, на 2 и на 4).

(7-8 класс, сложная). В классе больше 20, но меньше 30 учеников. При этом в классе тех, кто ходит в шахматный кружок, в 2 раза меньше, чем тех, кто не ходит. А тех, кто ходит в шашечный кружок, в 3 раза меньше, чем тех, кто не ходит. Сколько учеников в классе?

Ответ. 24 ученика.

Решение. Пусть в шахматный кружок ходит x ребят, тогда в него не ходит $2x$ ребят. Итак, всего в классе $3x$ ребят, и количество учеников в классе делится на 3. Аналогично, пусть в шашечный кружок ходит y ребят, тогда в него не ходит $3y$ ребят. Итак, всего в классе $4y$ ребят, и количество учеников в классе делится на 4.

Число учеников в классе делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное подходящее число, большее 20 и меньшее 30, это 24.

(9-10 класс, средняя). Докажите, что при любом натуральном n число n^3+3n^2+6n+8 является составным.

Решение. Утверждение задачи следует из разложения данного выражения на множители, каждый из которых больше единицы при всех натуральных n:

$$n^3+3n^2+6n+8=n^3+8+3n^2+6n=$$
$$=(n+2)(n^2-2n+4)+3n(n+2)=(n+2)(n^2+n+4).$$

(8-9 класс, сложная). Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2222. Докажите, что их сумма не может равняться 9999.

Решение. Если сумма трех целых чисел равна 9999, то либо они все нечетны (и тогда их произведение оканчивается на нечетную цифру), либо два из них четны, а одно нечетно (тогда их произведение делится на 4, а число, оканчивающееся на 22, на 4 не делится).

(8-10 класс, средняя). Сумма цифр натурального числа A равна сумме цифр числа $3A$.

а) Докажите, что А делится на 3.

б) Докажите, что А делится на 9.

в) Верно ли, что А обязательно делится на 27?

Ответ. в) Не обязательно.

Решение.

а), б) Пусть сумма цифр числа A равна S. Но так как $3A$ делится на 3, то S делится на 3, тогда и A делится на 3. Отсюда следует, что $3A$ делится на 9 и S также делится на 9, то есть A делится на 9.

в) Не обязательно, можно взять, например, A=9.

(8-10 класс, средняя). Найдите какие-нибудь три последовательных натуральных числа, меньших 1000, произведение которых делится на 9999.

Ответ. Например, 99, 100 и 101.

Решение. Этот пример можно получить, заметив, что $9999=99\cdot101$.

Замечание. Кроме этого, существует ровно один другой пример: 504, 505, 506.

(9-10 класс, средняя). На доске написано число 543254325432. Некоторые цифры стерли так, чтобы получить наибольшее возможное число, делящееся на 9. Чему равно это наибольшее число?

Ответ. 5435432532.

Решение. Из признака делимости на 9 следует, что сумма стертых цифр должна быть равна 6. Из двух чисел больше то, в записи которого больше цифр. Поэтому нужно стереть две цифры – либо 3 и 3, либо 2 и 4. Из двух десятиразрядных чисел больше то, у которого в старших разрядах стоят большие цифры. Поэтому нужно стереть первую двойку и последнюю четверку.

Алгебра

(8 класс, легкая). Найдите наименьший целый корень уравнения $(|x|-1)(x+2,5)=0$.

Ответ. –1.

(8 класс, легкая). Проходят ли прямые $x+y–1=0$, $2x–5y+1=0$ и $4x–3y–1=0$ через одну точку?

Ответ. Да.

Решение. Прямые проходят через точку $\left(\frac{4}{7};\frac{3}{7}\right)$.

(8-9 класс, средняя). Если в произведении двух чисел первый множитель увеличить на 1, а второй уменьшить на 1, то произведение увеличится на 1000. Как изменится произведение исходных чисел, если, наоборот, первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1?

Ответ. Уменьшится на 1002.

Решение. Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x+1)(y-1) = xy+y-x-1$. Произведение увеличилось на 1000, то есть $y-x-1=1000$ или $y-x=1001$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x-1)(y+1) = xy-y+x-1$. Заметим, что $xy-y+x-1 = xy-(y-x)-1 = xy-1001-1 = xy-1002$. То есть произведение уменьшилось на 1002.

(8 класс, средняя). Докажите, что если $a+2b=3c$ и $b+2c=3a$, то $c+2a=3b$.

Решение. Сложив два данных равенства, получим $a+3b+2c=3c+3a$, откуда $c+2a=3b$.

Замечание. Решая систему методом подстановки получим: $a = b = c$, откуда также следует доказываемое равенство.

(9 класс, средняя). Найдите сумму двух различных чисел a и b, удовлетворяющих равенству $a^2+b=b^2+a$.

Ответ. $a+b=1$.

Решение. Решение: уравнение можно преобразовать к виду $(a-b)(a+b-1)=0$. А так как $a \neq b$, то $a+b-1=0$, откуда $a+b=1$.

(9-10 класс, средняя). Найдите все пары чисел x, y, для которых выполнено равенство $\sqrt{x-y}+\sqrt{y-x}=x+y+1$.

Ответ. $x = y = -0{,}5$.

Решение. В силу неотрицательности подкоренных выражений должны одновременно выполняться неравенства $x \geq y$, $x \leq y$, откуда и следует $x = y = -0{,}5$.

(9-11 класс, средняя). Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих чисел.

Ответ. 105.

Решение. Сумма данных чисел равна 150. Так как все числа различны, то сумма девяти наименьших из них не меньше, чем 1 + 2 + ... + 9 = 45. Следовательно, наибольшее число не может быть больше чем 105. Это возможно: (1 + 2 + ... + 9 + 105) : 10 = 15.

(8-9 класс, сложная). В формулу линейной функции $y=kx+b$ вместо букв k и b впишите числа от 11 до 20 (каждое по одному разу) так, чтобы получилось пять функций, графики которых проходят через одну точку.

Решение. Например, графики функций $y=11x+20$, $y=12x+19$, $y=13x+18$, $y=14x+17$, $y=15x+16$, проходят через точку (1; 31).

Геометрия

(8 класс, легкая). Сторона AC треугольника ABC точками D и E разделена на три равные части (точка D лежит между A и E). Докажите, что если $BD=BE$, то треугольник ABC – равнобедренный.

Решение. Так как треугольник BDE равнобедренный, то $\angle BDE=\angle BED$. Значит, равны соответствующие смежные углы: $\angle ADB=\angle CEB$. По условию, $AD=EC$ и $BD=BE$. Поэтому треугольники ADB и CEB равны (по двум сторонам и углу между ними). Из равенства треугольников следует равенство сторон AB и BC. Отсюда следует, что треугольник ABC равнобедренный.

(8 класс, средняя). Высоты AA_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке O. Докажите, что если $OA=OC$, то треугольник ABC – равнобедренный.

Решение. $\Delta AOC_1=\Delta COA_1$ (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $OC_1=OA_1$ (см. рис. 4) . Поэтому $AA_1=CC_1$, и, следовательно, $\Delta ABA_1=\Delta CBC_1$ (по катету и острому углу). Откуда $AB=BC$.

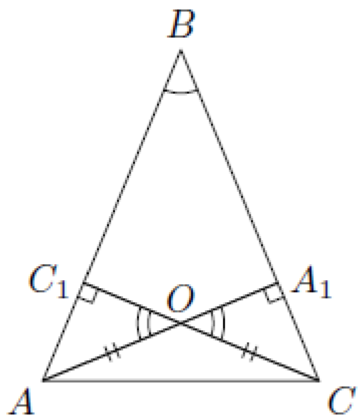

Рис. 4

(8-9 класс, средняя). В треугольнике ABC проведена медиана AD. Найдите углы треугольника ABC, если $\angle ADC=120°$, $\angle DAB=60°$.

Ответ. $\angle A=90°$, $\angle B=60°$, $\angle C=30°$.

Решение. Так как $\angle ADC=120°$, то $\angle ADB=60°$. Значит, треугольник ADB равносторонний (и $\angle ABD=60°$). Тогда $BD = AD = DC$ и треугольник ADC равнобедренный. Значит $\angle DAC= \angle DCA=(180°–120°):2=30°$. Откуда $\angle BAC = 90°$.

(9-10 класс, средняя). У звезды *ACEBD* (см. рис. 5) равны углы при вершинах *A* и *B*, углы при вершинах *E* и *C*, а также равны длины отрезков *AC* и *BE*. Докажите, что *AD*=*BD*.

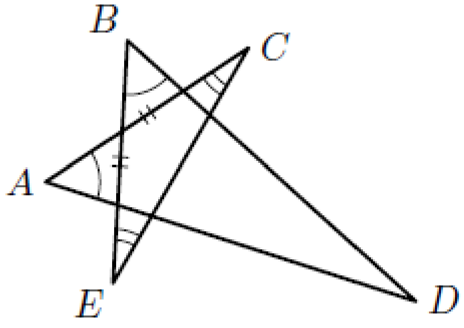

Рис. 5

Решение. Треугольники *ACG* и *BEF* равны (по стороне и двум углам, прилежащим к ней) (см. рис. 6). Следовательно, ∠AGC=∠*BFE* и *AG*=*BF*. По теореме о смежных углах ∠*FGD*=∠*GFD*. Поэтому треугольник *GFD* равнобедренный (*GD*=*FD*). Следовательно, *AG*+*GD*=*BF*+*FD*, т.е. *AD*=*BD*.

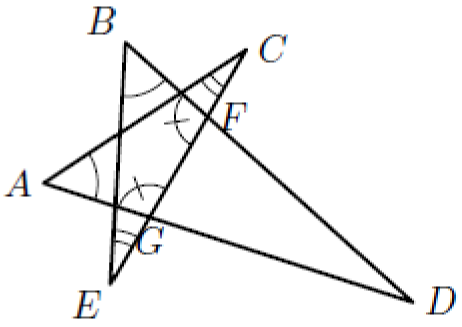

Рис. 6

(9 класс, средняя). В треугольнике *ABC* биссектриса *AE* равна отрезку *EC*. Найдите угол *ABC*, если *AC* = 2*AB*.

Ответ. ∠*ABC* = 90°.

Решение. Пусть точка *D* – середина стороны *AC* (см. рис. 7). Тогда *AD* = *AC*/2 = *AB*. Значит, треугольники *ABE* и *ADE* равны (сторона *AE* – общая, ∠*BAE* = ∠*CAE*). Тогда ∠*ABC* = ∠*ADE* = 90°, так как *ED* – медиана равнобедренного треугольника *AEC* (*AE*=*EC* – по условию) и, значит, его высота.

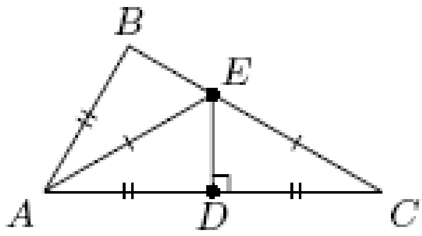

Рис. 7

(10-11 класс, средняя). Параллелограмм двумя парами прямых, параллельных его сторонам, разбит на девять параллелограммов (см. рис. 8). Найдите площадь четырехугольника *ABCD*, если площадь исходного параллелограмма равна S_1, а площадь центрального (закрашенного) параллелограмма равна S_2.

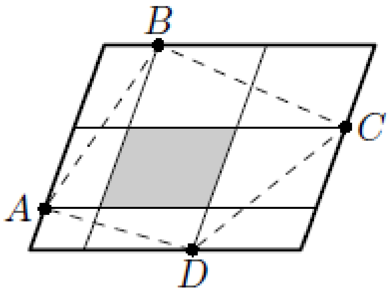

Рис. 8

Ответ. $\frac{S_1+S_2}{2}$.

Решение. Четырехугольник ABCD складывается из закрашенного параллелограмма и половинок параллелограммов, составляющих рамку.

(10-11 класс, сложная). Точка *D* – середина стороны *AC* треугольника *ABC*, *DE* и *DF* – биссектрисы треугольников *ADB* и *CDB*. Докажите, что $EF \parallel AC$.

Решение. По свойству биссектрисы треугольника $BE : EA = BD : DA = BD : DC = BF : FC$. Отсюда следует, что $EF \parallel AC$.

(10-11 класс, сложная). В треугольнике *ABC* биссектрисы углов *A* и *B* пересекают описанную окружность в точках *K* и *L*. Отрезки *AK* и *BL* пересекаются в точке *X* и делятся этой точкой в равных отношениях, считая от вершин треугольника. Докажите, что треугольник *ABC* – равнобедренный.

Решение. Из условия следует подобие треугольников AXB и KXL – по первому признаку ($\angle AXB=\angle KXL$). Отсюда $\angle BAK=\angle LKA$, но $\angle LKA=\angle ABL$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу). Так как AK и BL – биссектрисы, то отсюда следует $\angle A=\angle B$ (см. рис. 9).

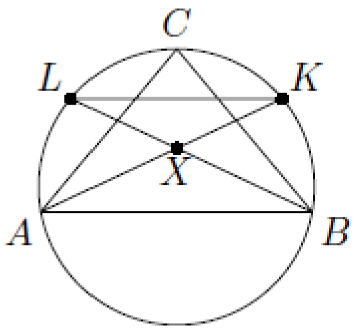

Рис. 9

Комбинаторика

(9-10 класс, сложная). Каких натуральных чисел от 1 до 1000000 больше: делящихся на 11, но не делящихся на 13, или делящихся на 13, но не делящихся на 11?

Ответ. Чисел, делящихся на 11, но не делящихся на 13, среди чисел от 1 до 1000000 больше, чем чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 11.

Решение. Действительно, пусть количества этих чисел равны A и B соответственно, а количество чисел от 1 до 1000000, кратных и 11, и 13, равно C. Тогда A+C – количество чисел, делящихся на 11, а B+C – делящихся на 13. Ясно, что $A+C>B+C$. Поэтому $A>B$.

(10-11 класс, средняя). Электронные часы показывают время от 00.00.00 до 23.59.59. Сколько времени в течение суток на табло часов горят ровно три цифры 7?

Ответ. 72 секунды.

Решение. Если на табло горят цифры $ab.cd.mn$, то $a\neq 7, c\neq 7, m\neq 7$. Поэтому $b=d=n=7$.

Но тогда a=0 или 1, c=0, 1, 2, 3, 4, 5, m=0, 1, 2, 3, 4, 5. Всего получается $2\cdot 6\cdot 6=72$ подходящих наборов цифр, а каждый набор горит 1 секунду.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий школьного этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В., Кукина Е.Г., Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н., Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.
Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.
Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное).— М., МЦНМО, 2013.
Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.
Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/

Методические рекомендации по разработке заданий и требований к проведению муниципального этапа

Введение

В 2018/2019 учебном году сохраняется общая четырехэтапная структура Олимпиады: школьный, муниципальный, региональный и заключительный этапы.

Настоящие методические рекомендации подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике и направлены в помощь региональным методическим комиссиям в составлении заданий для проведения муниципального этапа Олимпиады по математике в субъектах Российской Федерации.

Методические материалы содержат характеристику содержания муниципального этапа, описание подходов к разработке заданий региональными предметно-методическими комиссиями; рекомендации по порядку проведения олимпиад по математике, требования к структуре и содержанию олимпиадных задач, рекомендуемые источники информации для подготовки заданий, а также рекомендации по оцениванию решений участников олимпиад.

Кроме того, приведены образцы комплектов олимпиадных заданий для проведения муниципального этапа олимпиады с решениями. В них включены задачи, предлагавшиеся на начальных этапах олимпиад в различных регионах страны, либо включенные в сборники олимпиадных задач.

Центральная предметно-методическая комиссия по математике выражает надежду, что представленные методические рекомендации окажутся полезными при проведении муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике, и желает успехов организаторам в их проведении. В случае необходимости, дополнительную информацию по представленным методическим материалам можно получить по электронной почте, обратившись по адресу nazar_ag@mail.ru в Центральную предметно-методическую комиссию по математике.

Методические рекомендации для муниципального этапа Всероссийской олимпиады школьников по математике в 2018/2019 учебном году утверждены на заседании Центральной предметно-методической комиссии по математике (протокол № 2 от 13 июня 2018 года).

Основные задачи

На муниципальном этапе происходят изменения в целях Олимпиады. Она теперь направлена не только на популяризацию математики и математических знаний. Анализ ее результатов позволяет сравнивать качество работы с учащимися в различных школах, устанавливать уровень подготовки учащихся всего региона, определять направления работы с одаренными школьниками в регионе. При этом усиливается мотивирующая роль Олимпиады, когда у ее участников появляется возможность сравнения своих математических способностей и олимпиадных достижений не только с учащимися своей школы. Участники получают дополнительные стимулы для регулярных занятий математикой в кружках и на факультативах. Кроме того, муниципальный этап олимпиады является серьезным отборочным соревнованием, поскольку по его итогам из большого числа сильнейших школьников различных муниципальных образований формируется состав участников регионального этапа.

Соответственно меняется и характер заданий олимпиады. Они предполагают знакомство участников со спецификой олимпиадных задач по математике: умение строить цепочки логических рассуждений, доказывать утверждения. Стилистически задания еще в большей, по сравнению со школьным этапом, степени начинают отличаться от заданий повышенной трудности, включаемых в школьные учебники по математике, что предполагает психологическую готовность участников олимпиады к таким заданиям. Наконец, большое количество обладающих математическими способностями участников муниципального этапа олимпиады (в особенности в крупных муниципальных образованиях) предполагает заметно более высокий уровень сложности заданий.

Таким образом, основными целями муниципального этапа олимпиады являются формирование и закрепление интереса математически способных обучающихся к регулярным дополнительным занятиям математикой; повышение качества работы учителей математики в школах и развитие системы работы с одаренными детьми в регионе, отбор наиболее способных школьников в каждом муниципальном образовании, формирование регионального списка наиболее одаренных учащихся.

Необходимость решения сформулированных выше задач формирует подход к порядку проведения и характеру заданий на муниципальном этапе Олимпиады.

Порядок проведения

Олимпиада проводится для учащихся параллелей 7-11 классов. Рекомендуется проведение муниципального этапа олимпиады и для параллели 6 класса, в особенности в тех регионах, где развита система дополнительного образования (например, проводятся кружки при университетах). Кроме того, участники школьного этапа олимпиады вправе выполнять олимпиадные задания, разработанные для более старших классов по отношению к тем, в которых они проходят обучение. В случае прохождения на последующие этапы олимпиады, данные участники выполняют олимпиадные задания, разработанные для класса, который они выбрали на школьном этапе олимпиады. Таким образом, участники школьного этапа олимпиады, выступавшие за более старшие классы по отношению к тем, в которых они проходят обучение, на муниципальном этапе также выполняют задания для более старших классов.

В муниципальном этапе олимпиады принимают участие участники школьного этапа олимпиады текущего учебного года, набравшие необходимое для участия в муниципальном этапе олимпиады количество баллов, установленное организатором муниципального этапа олимпиады. Кроме того, участниками олимпиады являются обучающиеся, ставшие победителями и призерами муниципального этапа олимпиады предыдущего года, при условии, что они продолжают обучение в общеобразовательных учебных заведениях. Вышесказанное означает **недопустимость ограничения числа участников Олимпиады от одного образовательного учреждения**.

Рекомендуемая продолжительность олимпиады: для учащихся 6 классов – 3 часа; для учащихся 7-11 классов – 4 часа.

Во время Олимпиады участники:

должны соблюдать установленный порядок проведения Олимпиады;

должны следовать указаниям организаторов;

не имеют права общаться друг с другом, свободно перемещаться по аудитории;

не вправе пользоваться справочными материалами, средствами связи и электронно-вычислительной техникой.

При установлении факта нарушения участником Олимпиады Порядка или использования во время тура запрещенных источников информации решением Оргкомитета соответствующего этапа Олимпиады такой участник лишается возможности дальнейшего участия в Олимпиаде.

Олимпиада должна проходить как абсолютно объективное, беспристрастное и честное соревнование с высоким уровнем качества проверки работ участников и удобными условиями работы для участников. Для достижения этих целей:

а) Требуется выполнение олимпиадных работ в тетрадях в клетку в силу того, что на математических олимпиадах предлагаются задачи на разрезание фигур, задачи на клетчатых досках, задачи, требующие построения рисунков и графиков.

б) Работы участников перед проверкой обязательно шифруются. Наиболее удобной формой кодирования является запись шифра (например, 9-01, 9-02, …) на обложке тетради и на первой беловой странице с последующим снятием обложки и ее отдельным хранением до окончания проверки. Расшифровка работ осуществляется **после** составления предварительной итоговой таблицы и предварительного определения победителей и призеров олимпиады.

в) В состав жюри олимпиады наряду с лучшими учителями необходимо включение преподавателей университетов, а также студентов и аспирантов, успешно выступавших на олимпиадах высокого уровня. Работа преподавателя в системе дополнительного образования, в том числе с участниками муниципального этапа, не может быть основанием для отказа от его включения в состав методических комиссий и жюри.

г) После опубликования предварительных результатов проверки олимпиадных работ Участники имеют право ознакомиться со своими работами, в том числе сообщить о своем несогласии с выставленными баллами. В этом случае Председатель жюри Олимпиады назначает члена жюри для повторного рассмотрения работы. При этом оценка по работе может быть изменена, если запрос Участника об изменении оценки признается обоснованным. Жюри олимпиады не вправе отказывать участнику олимпиады в исправлении оценки его работы в ситуации, когда реально требуется ее повышение. Изменение оценки согласуется с Председателем жюри и вносится в итоговую таблицу.

д) По результатам олимпиады создается итоговая таблица по каждой параллели. Количество победителей и призеров муниципального этапа Олимпиады определяется, исходя из квоты победителей и призеров, установленной организатором муниципального этапа Олимпиады. Отметим, что в каждой из параллелей победителями могут стать несколько участников.

Принципы составления олимпиадных заданий и формирования комплектов олимпиадных заданий для муниципального этапа

Задания муниципального этапа олимпиады должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Задания должны носить творческий характер и проверять не степень усвоения участником олимпиады различных разделов школьной математики, а его способность к нахождению решений новых для него задач. Большая часть заданий должна включать в себя элементы (научного) творчества.
2. В задания нельзя включать задачи по разделам математики, не изученным хотя бы по одному из базовых учебников по математике, алгебре и геометрии в соответствующем классе к моменту проведения олимпиады.
3. Задания олимпиады должны быть различной сложности для того, чтобы, с одной стороны, предоставить большинству Участников возможность выполнить наиболее простые из них, с другой стороны, достичь одной из основных целей олимпиады – определения наиболее способных Участников. Желательно, чтобы с первым заданием успешно справлялись около 70% участников, со вторым – около 50%, с третьим –20%-30%, а с последними – лучшие из участников олимпиады.
4. В задания должны включаться задачи, имеющие привлекательные, запоминающиеся формулировки.
5. Формулировки задач должны быть корректными, четкими и понятными для участников. Задания не должны допускать неоднозначности трактовки условий. Задания не должны включать термины и понятия, не знакомые учащимся данной возрастной категории.
6. Вариант по каждому классу должен включать в себя 4-6 задач. Тематика заданий должна быть разнообразной, по возможности охватывающей все разделы школьной математики: арифметику, алгебру, геометрию. Варианты также должны включать в себя логические задачи (в среднем звене школы), комбинаторику. Так в варианты для 6 класса рекомендуется включать задачи по арифметике, логические задачи, задачи по наглядной геометрии, задачи, использующие понятие четности; в 7-8 классах добавляются задачи, использующие для решения преобразования алгебраических выражений, задачи на делимость, геометрические задачи на доказательство, комбинаторные задачи; в 9-11 последовательно добавляются задачи на

свойства линейных и квадратичных функций, задачи по теории чисел, неравенства, задачи, использующие тригонометрию, стереометрию, математический анализ, комбинаторику.

7. Желательно составление заданий олимпиады из **новых** задач, специально подготовленных методической комиссией для олимпиады. В случае, если задания олимпиады подбираются из печатных изданий и Интернет-ресурсов, необходимо, чтобы эти источники были неизвестны участникам Олимпиады. При этом задания олимпиады не должны составляться на основе одного источника, с целью уменьшения риска знакомства одного или нескольких ее участников со всеми задачами, включенными в вариант. Олимпиада должна выявлять не энциклопедичность знаний Участника, а его математические способности.

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях необходимо включение в варианты заданий не только ответов и решений заданий, но и критериев оценивания работ.

Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри. Такая организация проверки рекомендуется для регионов с невысокой плотностью населения. При необходимости на проверку можно отправлять не сами работы, а их сканы.

Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения.

Наилучшим образом зарекомендовала себя на математических олимпиадах 7-балльная шкала, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение.
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочеты, в целом не влияющие на решение.

5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений.
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении).
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют.
0	Решение отсутствует.

Помимо этого, в методических рекомендациях по проведению Олимпиады следует проинформировать жюри муниципального этапа о том, что:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведенного в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень ее правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачеркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при ее выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание Участника», в том числе за запись в работе большого по объему текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

Описание необходимого материально-технического обеспечения для выполнения олимпиадных заданий

Тиражирование заданий осуществляется с учетом следующих параметров: листы бумаги формата А5 или А4, черно-белая печать.

Для выполнения заданий олимпиады каждому участнику требуется тетрадь в клетку. Рекомендуется выдача отдельных листов для черновиков (**черновики не проверяются**). Участники используют свои письменные принадлежности: авторучка с синими, фиолетовыми или черными чернилами, циркуль, линейка, карандаши. Запрещено использование для записи решений ручек с красными или зелеными чернилами.

Перечень справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники, разрешенных к использованию во время проведения олимпиады

Выполнение заданий математических олимпиад не предполагает использование каких-либо справочных материалов, средств связи и электронно-вычислительной техники.

Участникам во время проведения олимпиады запрещено иметь при себе любые электронные вычислительные устройства или средства связи (в том числе и в выключенном виде), учебники, справочные пособия.

Тематика заданий муниципального этапа олимпиады

Ниже приведена тематика олимпиадных заданий для разных классов.

В приведенном списке тем для пар классов некоторые темы могут относиться только к более старшему из них (в соответствии с изученным материалом).

VI-VII КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления.

Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе.

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. НОК и НОД. Понятие о взаимно простых числах. Разложение числа на простые множители.

Четность.

Деление с остатком. Признаки делимости на 2, 3, 5, 6, 9.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции.

Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа.

Уравнения.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение.

Функции.

Функция. График функции. Функции: $y = kx$, $y = kx + b$.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений.

Представление о начальных понятиях геометрии, геометрических фигурах. Равенство фигур.

Отрезок. Длина отрезка и ее свойства. Расстояние между точками.

Угол. Виды углов. Смежные и вертикальные углы и свойства.

Пересекающиеся и параллельные прямые. Перпендикулярные прямые.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Представление о площади фигуры.

Специальные олимпиадные темы.

Числовые ребусы. Взвешивания.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Инвариант.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

VIII-IX КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Натуральные числа и нуль. Десятичная система счисления. Арифметические действия с натуральными числами. Представление числа в десятичной системе

Делители и кратные числа. Простые и составные числа. Взаимно простые числа.

Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11.

Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней.

Обыкновенные дроби. Сравнение дробей. Арифметические действия с обыкновенными дробями.

Десятичные дроби.

Отношения. Пропорции. Основное свойство пропорции. Прямая и обратная пропорциональность величин. Проценты.

Положительные и отрицательные числа. Модуль числа. Сравнение положительных и отрицательных чисел. Арифметические действия с положительными и отрицательными числами, свойства арифметических действий.

Целые числа. Рациональные числа. Понятие об иррациональном числе. Изображение чисел точками на координатной прямой.

Числовые неравенства и их свойства. Операции с числовыми неравенствами.

Квадратный корень.

Выражения и их преобразования.

Степень с натуральным показателем и ее свойства. Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Квадратный трехчлен: выделение квадрата двучлена, разложение на множители.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Уравнения и неравенства.

Уравнение с одной переменной. Корни уравнения. Линейное уравнение. Квадратное уравнение. Формула корней квадратного уравнения. Теорема Виета. Решение рациональных уравнений.

Уравнение с двумя переменными. Система уравнений. Решение системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Решение простейших нелинейных систем.

Графическая интерпретация решения систем уравнений с двумя переменными.

Неравенства. Линейные неравенства с одной переменной и их системы. Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Прямоугольная система координат на плоскости.

Функция. Область определения и область значений функции. График функции. Возрастание функции, сохранение знака на промежутке.

Функции: $y = kx$, $y = kx + b$, $y = k/x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = |x|$.

Преобразование графиков функций. Свойства квадратного трехчлена. Геометрические свойства графика квадратичной функции.

Планиметрия.

Треугольник и его элементы. Признаки равенства треугольников. Сумма углов треугольника.

Подобие треугольников. Признаки подобия треугольников.

Неравенство треугольника.

Средняя линия треугольника и ее свойства.

Соотношения между сторонами и углами треугольника. Свойства равнобедренного и равностороннего треугольников. Прямоугольный треугольник. Теорема Пифагора. Решение прямоугольных треугольников.

Четырехугольники. Параллелограмм, его свойства и признаки. Прямоугольник, ромб, квадрат и их свойства. Трапеция. Средняя линия трапеции и ее свойства. Площади четырехугольников.

Понятие о симметрии.

Окружность и круг. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Задачи на построение с помощью циркуля и линейки

Вектор. Угол между векторами. Координаты вектора. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Скалярное произведение векторов.

Специальные олимпиадные темы.

Логические задачи. Истинные и ложные утверждения.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Разрезания.

Раскраски.

Игры.

Инвариант.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

X-XI КЛАССЫ

Числа и вычисления.

Делимость. Простые и составные числа. Разложение числа на простые множители. Четность. Деление с остатком. Признаки делимости на 2^k, 3, 5^k, 6, 9, 11. Свойства факториала. Свойства простых делителей числа и его степеней. Взаимно простые числа

Целые числа. Рациональные числа. Иррациональные числа. Число π.

Выражения и их преобразования.

Многочлены. Формулы сокращенного умножения. Разложение многочленов на множители. Теорема Безу.

Арифметическая и геометрическая прогрессии.

Корень n-й степени и его свойства. Свойства степени с рациональным показателем.

Тригонометрия.

Основные тригонометрические тождества. Формулы приведения.

Преобразования тригонометрических выражений. Свойства тригонометрических функций: ограниченность, периодичность.

Уравнения и неравенства.

Уравнения с одной переменной. Квадратные уравнения. Теорема Виета.

Иррациональные уравнения. Показательные и логарифмические уравнения, их системы. Тригонометрические уравнения.

Неравенства с одной переменной. Решение неравенств методом интервалов. Показательные и логарифмические неравенства.

Уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком модуля. Простейшие уравнения, неравенства и системы с параметрами.

Неравенства второй степени с одной переменной. Неравенства о средних.

Системы уравнений.

Текстовые задачи, сводящиеся к решению уравнений, неравенств, систем уравнений.

Функции.

Числовые функции и их свойства: периодичность, четность и нечетность, экстремумы, наибольшее и наименьшее значения, промежутки знакопостоянства, ограниченность. Понятие об обратной функции. Свойство графиков взаимно обратных функций.

Тригонометрические функции числового аргумента: синус, косинус, тангенс, котангенс. Свойства и графики тригонометрических функций.

Показательная функция, ее свойства и график. Логарифмическая функция, ее свойства и график. Степенная функция, ее свойства и график.

Производная, ее геометрический и механический смысл.

Применение производной к исследованию функций, нахождению их наибольших и наименьших значений и построению графиков. Построение и преобразование графиков функций.

Касательная и ее свойства.

Планиметрия и стереометрия.

Планиметрия.

Признаки равенства треугольников. Признаки подобия треугольников. Неравенство треугольника. Площадь треугольника.

Многоугольники. Правильные многоугольники.

Окружность. Касательная к окружности и ее свойства. Центральные и вписанные углы. Окружность, описанная около треугольника. Окружность, вписанная в треугольник.

Угол между касательной и хордой. Пропорциональные отрезки в окружности.

Вектор. Свойства векторов.

Стереометрия.

Взаимное расположение прямых в пространстве.

Свойства параллельности и перпендикулярности прямых.

Взаимное расположение прямой и плоскости. Перпендикуляр и наклонная к плоскости. Свойства параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей. Теорема о трех перпендикулярах.

Взаимное расположение двух плоскостей. Свойства параллельности и перпендикулярности плоскостей. Угол между прямыми. Угол между прямой и плоскостью. Двугранный и многогранный углы. Линейный угол двугранного угла.

Параллелепипед. Пирамида. Призма.

Декартовы координаты в пространстве. Расстояние между точками.

Вектор в пространстве.

Специальные олимпиадные темы.

«Оценка + пример».

Построение примеров и контрпримеров.

Принцип Дирихле.

Раскраски.

Игры.

Метод математической индукции.

Геометрические свойства графиков функций.

Элементы комбинаторики.

Диофантовы уравнения (уравнения в целых числах).

Типовые задания муниципального этапа олимпиады

Приведенные типовые задания муниципального этапа олимпиады не могут в одинаковой степени устанавливать планку сложности для всех регионов, в силу заметной разницы в уровне развития в различных регионах олимпиадного движения, наличия или отсутствия развитой системы городских математических кружков, наличия в городах сильных математических школ и т.п.. Региональным методическим комиссиям при разработке заданий Олимпиады следует учитывать уровень математического образования в территории. Предлагаемые задания демонстрируют типовую структуру заданий муниципального этапа олимпиады, примерный (усредненный) уровень их сложности, тематику.

Запрещается использовать для проведения олимпиады приведенный ниже комплект заданий, так как данные методические рекомендации являются открытыми, и участники олимпиады могли ознакомиться с ними.

Условия задач

6 класс

6.1. Вычеркните из числа 987654321 как можно больше цифр так, чтобы оставшееся число делилось на 15.

6.2. Сложите из пятиклеточных фигурок, среди которых нет двух одинаковых, какой-нибудь клетчатый квадрат.

6.3. В комнате 10 человек – лжецы и рыцари. Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Три человека сказали: «В комнате нечетное число лжецов»; а остальные семь сказали: «В комнате четное число рыцарей». Сколько рыцарей могло быть в комнате?

6.4. Можно ли в равенстве $0,{*}{*}+0,{*}{*}+0,{*}{*}+0,{*}{*}=1$ заменить звездочки различными цифрами от 0 до 7 так, чтобы получилось верное равенство?

6.5. В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зеленого, причем шаров каждого цвета хотя бы по одному. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров – синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

7 класс

7.1. Вырежьте из клетчатого квадрата 5×5 одну нецентральную клетку так, чтобы оставшуюся часть можно было разрезать на 6 равных клетчатых фигурок, не являющихся прямоугольниками. Приведите пример такого разрезания.

7.2. Можно ли в равенстве $0,{*}{*}+0,{*}{*}+0,{*}{*}+0,{*}{*}=2$ заменить звездочки различными цифрами от 1 до 9 так, чтобы получилось верное равенство?

7.3. В классе 26 школьников. Для школьной игры первому ученику дали 2 фишки. Второму – на 3 фишки больше. А каждому следующему давали либо на 3 фишки больше, либо на 3 меньше, чем предыдущему. Затем ученики как-то разбились на три команды. Могло ли оказаться, что суммарное число фишек в каждой команде оказалось одинаковым?

7.4. Турнир лучников проводился по следующим правилам. С каждого участника собрали одинаковый взнос. Организаторы турнира забрали 1/3 от всех поступивших денег, а оставшиеся деньги пошли в призовой фонд турнира. Робин Гуд, победивший в турнире, получил больше каждого из остальных участников – 1/6 от призового фонда, однако оказался в убытке. Какое количество лучников могло участвовать в турнире? Приведите все возможные варианты и докажите, что других нет.

7.5. В ящике лежат шары трех цветов: красного, синего и зеленого, причем шаров каждого цвета хотя бы по 2. Известно, что среди любых 10 шаров найдется красный шар, а среди любых 20 шаров – синий. Какое наибольшее количество шаров могло лежать в ящике?

8 класс

8.1. В школе «Эксперимент» учащимся выставляют оценки от 1 до 5. Борис получил по контрольной двойку. Учитель заметил, что, если ему изменить эту двойку на пятерку, то средний балл по контрольной среди Борисов в классе увеличится ровно в два раза. Сколько Борисов писало контрольную?

8.2. Можно ли заменить в пяти равенствах вида $*+*+*=*+*$, все звездочки на натуральные числа от 1 до 25 так, чтобы все равенства получились верными, а каждое из чисел использовалось ровно 1 раз?

8.3. Докажите, что существует лишь конечное количество пар натуральных чисел (a,b), для которых справедливо равенство $a(a+b)=(2^{2017}+3^{2017})b$.

8.4. На катете BC прямоугольного треугольника ABC ($\angle BCA=90^\circ$) выбраны точки M и N так, что $\angle CAM=\angle MAN=\angle NAB$. Прямая, проходящая через точку M, пересекает отрезки AN и AB в точках E и F соответственно. Найдите AB, если $AE=a$, $\angle ANB=130^\circ$ и $\angle BFM=110^\circ$.

8.5. В клетках доски 8×8 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке – по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В одной из соседних со мной клеток стоит лжец». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число лжецов могло стоять на доске?

9 класс

9.1. Можно ли в равенстве $1\cdot 2\cdot 3\cdot K\cdot 8\cdot 9\cdot 10=11\cdot 12\cdot 13\cdot K\cdot 20$ вычеркнуть из левой части один сомножитель, а из правой – несколько так, чтобы получилось верное равенство?

9.2. На доске написано натуральное число b. Про него сказали три утверждения:

1) это число четное;

2) это число меньше 102;

3) уравнение $x^2+20x+b=0$ имеет хотя бы один корень.

Какое наибольшее число может быть написано на доске, если из этих трех утверждений ровно два – верные?

9.3. Из точки A провели касательные AB и AC к окружности с центром O (здесь B и C – точки касания). Точка M – середина отрезка AO. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается прямой AC.

9.4. Даны различные положительные числа a, b, c, d такие, что $a+b>c+d$. Докажите, что $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{a}{d}+\frac{b}{c}>4$.

9.5. В клетках доски 7×7 стоят лжецы и рыцари (в каждой клетке – по одному человеку). Лжецы всегда лгут, а рыцари всегда говорят правду. Каждый сказал: «В соседних со мной клетках нет рыцарей». Клетки считаются соседними, если у них есть хотя бы одна общая вершина. Какое наименьшее число рыцарей могло стоять на доске?

10 класс

10.1. Числа $1,2,3,\mathrm{K}\ ,100$ разбили на 50 пар, и числа в каждой паре сложили. Какое наибольшее количество из этих пятидесяти сумм может делиться на 20?

10.2. Ненулевые числа a,b,c образуют в указанном порядке арифметическую прогрессию. Докажите, что уравнение $ax^2+2\sqrt{2}bx+c=0$ имеет два решения.

10.3. Можно ли какое-нибудь число вида 10000K 00001 представить в виде $x!+y!+z!$, где x, y, z – натуральные числа? (Как обычно, через $n!$ обозначается произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\mathrm{K}\ \cdot n$.)

10.4. Окружность, вписанная в треугольник ABC, касается стороны AB в точке K, а стороны AC – в точке T. На меньшей дуге TK выбрана точка P. Прямая, проходящая через точку K параллельно прямой AP, вторично пересекает окружность в точке N. Найдите PK, если известно, что $AP=a$ и $KN=b$.

10.5. Вася придумал новый корабль для морского боя – *«боевой бублик»*. Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 8×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

11 класс

11.1. Найдите все значения параметра a, для которых найдётся такое число β, что числа $\sin\beta$ и $2\cos\beta$ являются различными корнями уравнения $x^2+ax+1=0$.

11.2. По итогам волейбольного турнира, проведенного в один круг (т. е. каждая команда сыграла с каждой одну игру), оказалось, что первые три команды выиграли у каждой из остальных команд, а сумма очков, набранных первыми тремя командами, на 3 больше, чем сумма очков, набранных остальными командами. Сколько всего команд участвовало в турнире, если известно, что их больше трех? (За победу в игре дается 1 очко, за поражение – 0; ничьих в волейболе не бывает.)

11.3. Положительные числа x и y, меньшие $1/2$, удовлетворяют неравенству $y^2-x^2>y-x$. Докажите, что они удовлетворяют и неравенству $y^3-x^3>y-x$.

11.4. В параллелепипеде отмечена одна вершина. Какое наибольшее количество остальных вершин может находиться на одном и том же расстоянии от отмеченной?

11.5. Вася придумал новый корабль для морского боя – *«боевой бублик»*. Этот корабль состоит из всех клеток квадрата 3×3, кроме его центральной клетки. На поле 10×8 разместили один боевой бублик. Какое минимальное число выстрелов нужно сделать, чтобы гарантированно его ранить?

Решения задач

6 класс

6.1. Ответ. Нужно вычеркнуть все цифры, кроме 7 и 5.

Данное число должно быть минимум двузначным и оканчиваться на 5. Числа 95, 85, 65 на 15 не делятся. Значит, приведенный пример – единственный.

6.2. Один из возможных примеров показан на рис. 1.

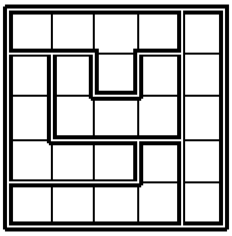

Рис. 1

6.3. Ответ. 3 рыцаря.

Если в комнате нечетное число лжецов, то рыцарей также будет нечетное число, так как всего в комнате 10 человек. Поэтому одна из двух произнесенных фраз – ложь, а другая – правда. Но и 3, и 7 – нечетные числа, поэтому правдой является фраза «В комнате нечетное число лжецов». Значит, в комнате 3 рыцаря.

6.4. Ответ. Можно.

Например, $0{,}03+0{,}14+0{,}26+0{,}57=1$.

6.5. Ответ. 27 шаров.

Заметим, что суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9 – в противном случае нашлись бы 10 шаров, среди которых нет красного. Аналогично, суммарное количество красных и зеленых шаров не больше 19.

Так как по условию есть хотя бы один зеленый шар, а суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9, то синих шаров не больше 8. Теперь из того, что синих шаров не больше 8, а красных и зеленых шаров не больше 19, следует, что суммарное количество шаров не превосходит $8+19=27$.

Если же в коробке 1 зеленый, 8 синих и 18 красных шаров, то условие задачи выполняется.

7 класс

7.1. Один из возможных примеров показан на рис. 2.

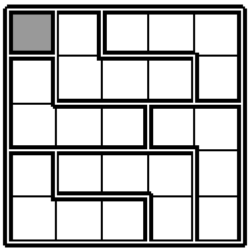

Рис. 2

7.2. Ответ. Можно.

Например, $0{,}13+0{,}24+0{,}65+0{,}98=2$.

7.3. Ответ. Не могло.

Предположим противное. Тогда суммарное количество фишек у школьников равнялось бы утроенному количеству фишек у одной команды, то есть делилось бы на 3. Но это количество на 3 не делится. Докажем это. Можно считать, что каждому школьнику сначала дали по 2 зеленые фишки, а потом некоторым из них добавляли красные фишки. Из условия следует, что количество красных фишек у каждого школьника делится на 3. А это значит, что суммарное количество красных фишек также делится на 3. Если бы общее количество фишек делилось на 3, то и количество зеленых фишек также делилось бы на 3, но оно равно $2\cdot 26=52$.

Замечание. Фактически мы показали, что у каждого школьника количество фишек имеет остаток 2 при делении на 3. Тогда суммарное количество фишек будет иметь остаток 1 при делении на 3.

7.4. Ответ. 7 или 8 лучников.

Призовой фонд составляет $\frac{2}{3}$ от всех поступивших денег. Поэтому победитель турнира получил $\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$ от поступивших денег. Значит, если число участников не больше восьми, то взнос превышает награду за первое место, а иначе – не превышает. Итак, количество участников не больше восьми.

Так как победитель получил $\frac{1}{6}$ от призового фонда, то остальные участники разделили $\frac{5}{6}$ фонда. При том победитель получил больше каждого из остальных. Поэтому каждый из оставшихся получил меньше $\frac{1}{6}$ фонда, а значит, остальных больше, чем $\frac{5}{6}:\frac{1}{6}=5$ человек.

Таким образом, в турнире могли участвовать 7 или 8 человек. Обе этих ситуации возможны. Для этого, например, не выигравшие участники могли поровну разделить остающиеся $\frac{5}{6}$ призового фонда (получив по $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}<\frac{1}{6}$ или по $\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{7}<\frac{1}{6}$ призового фонда).

7.5. Ответ. 26 шаров.

Заметим, что суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9 – в противном случае нашлись бы 10 шаров, среди которых нет красного. Аналогично, суммарное количество красных и зеленых шаров не больше 19.

Так как по условию есть хотя бы 2 зеленых шара, а суммарное количество синих и зеленых шаров не больше 9, то синих шаров не больше 7. Теперь из того, что синих шаров не больше 7, а красных и зеленых шаров не больше 19, следует, что суммарное количество шаров не превосходит $7+19=26$.

Если же в коробке 2 зеленых, 7 синих и 17 красных шаров, то условие задачи выполняется.

8 класс

8.1. Ответ. Два Бориса.

Пусть контрольную писало m Борисов, и другие Борисы набрали вместе x баллов. Тогда условие на средний балл выглядит так: $2\cdot\frac{x+2}{m}=\frac{x+5}{m}$. Отсюда $2(x+2)=x+5$, то есть

$x=1$. Это возможно только если контрольную писал еще один Борис, который получил по контрольной единицу. Таким образом, контрольную писало два Бориса.

8.2. Ответ. Нельзя.

Пусть такая замена звездочек на числа возможна. Тогда сумма всех пяти чисел, входящих в первое равенство, четна (она равна удвоенной сумме чисел в одной части). Также четными будут суммы пятерок чисел, входящих в остальные четыре равенства. Но тогда четна и сумма всех чисел. А она – нечетная, так как в этой сумме нечетное количество (а именно 13) нечетных слагаемых.

8.3. Обозначим $N=2^{2017}+3^{2017}$. Перепишем уравнение в виде $a^2=(N-a)b$. Так как a^2 и b положительны, то положительна и разность $N-a$. Значит, $a<N$. Поэтому существует лишь конечное количество таких чисел a (так как a – натуральное). Для каждого такого a однозначно находится $b=\dfrac{a^2}{N-a}$ (причем не все эти b будут натуральными). Поэтому количество пар натуральных чисел (a,b), удовлетворяющих уравнению тоже конечно.

8.4. Ответ. $AB=2a$.

Из условия следует, что $\angle ANC=50^\circ$. Тогда в прямоугольном треугольнике ANC имеем $\angle CAN=40^\circ$. Отсюда $\angle CAM=\angle MAN=\angle NAB=20^\circ$. Так как $\angle BFM=110^\circ$, то $\angle AFM=70^\circ$. Но тогда в треугольнике MAF получаем $\angle AMF=70^\circ$. Значит, треугольник MAF – равнобедренный, и его биссектриса AE является высотой (см. рис. 3). Но тогда прямоугольные треугольники AME и AMC равны (AM – общая, $\angle CAM=\angle MAE$). Поэтому $AC=a$. Наконец, поскольку в прямоугольном треугольнике ABC угол $\angle CAB$ равен 60°, гипотенуза равна $AB=2AC=2a$.

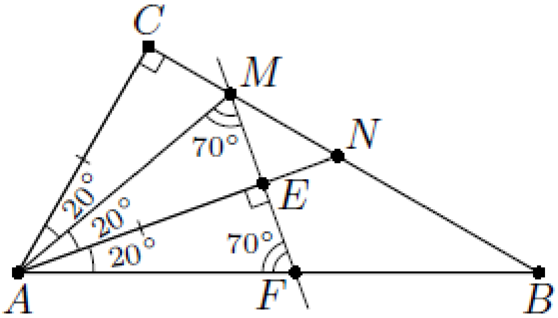

Рис. 3

8.5. Ответ. 9.

Из условия следует, что в одной из соседних клеток с любым рыцарем должен стоять лжец, а все соседи лжеца должны быть рыцарями.

Рассмотрим разбиение доски на 9 непересекающихся областей и отметим в каждой области по одной клетке, как это показано на рис. 4.

Заметим, что либо в отмеченной клетке стоит лжец, либо (если в ней стоит рыцарь) хотя бы в одной соседней с ней клетке стоит лжец. Следовательно, в каждой из областей есть хотя бы один лжец. Поэтому лжецов должно быть не меньше 9.

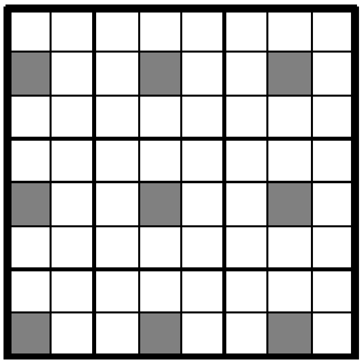

Рис. 4

Если же лжецы будут стоять в отмеченных клетках, а в остальных будут стоять рыцари, то условие задачи будет выполнено.

9 класс

9.1. Ответ. Можно.

Если слева вычеркнуть 4, а справа 11, 13, 17, 19 и 16, то оба оставшихся выражения будут равны $2^6 3^4 5^2 7^1$.

Замечание. Приведенный пример – не единственный; например, можно слева вычеркнуть 3 вместо 4, а справа – 12 вместо 16.

9.2. Ответ. 99.

Рассмотрим условие 3). Для того, чтобы квадратное уравнение имело хотя бы один корень, нужно, чтобы дискриминант был неотрицательным. То есть $D = 20^2 - 4b \geq 0$, откуда $b \leq 100$.

Если число, написанное на доске, не меньше 102, то утверждения 2) и 3) не верны. Поэтому написанное число не больше 101.

Если написанное число равно 101, то неверны утверждения 1) и 3), то есть число 101 не подходит.

Если написанное число равно 100, то верны все три утверждения. Значит, число 100 не подходит.

Если написанное число равно 99, то верны ровно два утверждения – 2) и 3). Значит, наибольшее возможное число – 99.

Замечание. Можно было рассуждать и так. Если утверждение 3), то есть «$b \le 100$» верно, то верно и утверждение 2). Но тогда по условию задачи утверждение 1) не верно. В этом случае наибольшее возможное число $b = 99$. Если же утверждение 3) не верно, то верны утверждения 1) и 2). Но таких чисел b не существует.

9.3. Условие касания равносильно тому, что $\angle MAC = \angle ABM$. Но треугольник ABO – прямоугольный (OB – радиус, проведенный к касательной BA), а отрезок BM – его медиана, проведенная к гипотенузе. Поэтому $BM = MA$ (см. рис. 5). Значит, $\angle ABM = \angle MAB = \angle MAC$ (мы использовали то, что AO – биссектриса угла BAC).

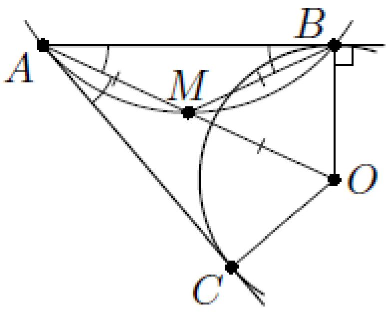

Рис. 5

9.4. Заметим, что $\frac{a}{c}+\frac{b}{d}+\frac{a}{d}+\frac{b}{c}=\frac{a+b}{c}+\frac{a+b}{d}>\frac{c+d}{c}+\frac{c+d}{d}=\frac{(c+d)^2}{cd}\ge 4.$

Последнее неравенство справедливо, так как оно равносильно неравенству $(c+d)^2 \ge 4cd$, то есть $(c-d)^2 \ge 0$.

9.5. Ответ. 9.

Из условия следует, что в одной из соседних клеток с любым лжецом должен стоять рыцарь, а все соседи рыцаря должны быть лжецами.

Рассмотрим разбиение доски на 9 непересекающихся областей и отметим в каждой области по одной клетке, как это показано на рис. 6. Заметим, что либо в отмеченной клетке стоит рыцарь, либо (если в ней стоит лжец) хотя бы в одной соседней с ней клеткой стоит рыцарь. Следовательно, в каждой из областей есть хотя бы один рыцарь.Поэтому рыцарей должно быть не меньше 9.

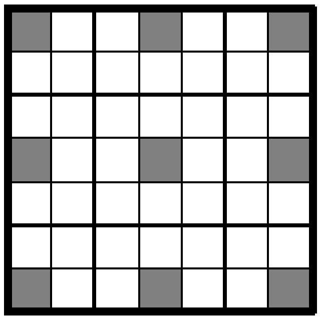

Рис. 6

Если же рыцари будут стоять в отмеченных клетках, а в остальных будут стоять лжецы, то условие задачи будет выполнено.

10 класс

10.1. Ответ. 49.

Заметим, что все 50 сумм не могут делиться на 20, так как в этом случае и сумма всех чисел делилась бы на 20. Но сумма всех чисел равна 5050.

Если разбить числа на пары следующим образом: 1 и 99, 2 и 98, …, 49 и 51, 50 и 100, то суммы чисел в первых 49 парах будут равны 100, а значит, будут делиться на 20.

Замечание. То, что суммы чисел во всех парах не могут делиться на 20, можно доказать по-другому. Для этого достаточно рассмотреть числа 20, 40, 60, 80 и 100 и заметить, что если в какую-то пару входит ровно одно число из этих пяти, то сумма чисел пары не может делиться на 20. Но этих чисел нечетное количество, поэтому найдется пара ровно с одним из этих чисел.

10.2. Из характеристического свойства арифметической прогрессии получаем $b = \frac{a+c}{2}$. Тогда дискриминант интересующего нас квадратного уравнения равен $D = 8b^2 - 4ac = 2(a+c)^2 - 4ac = 2a^2 + 2c^2 > 0$. Поэтому квадратное уравнение имеет два решения.

10.3. Ответ. Нельзя.

Каждое число $n!$ при $n \geq 2$ является четным. Поэтому среди чисел x, y, z ровно одно равно 1 (все три не могут равняться 1, иначе сумма их факториалов будет равна 3). Пусть, например, $z = 1$. Тогда $x! + y! = 100\ldots00$. Если оба числа x и y не меньше трех, то каждое слагаемое в сумме $x! + y!$ делится на 3, то есть и их сумма делится на 3, что не так. Значит, хотя бы одно из этих двух чисел меньше 3. Пусть, например, $y = 2$, тогда $y! = 2$, поэтому $x! = 99\ldots998$. Последнее невозможно, так как это число не делится на 3.

10.4. Ответ. $PK = \sqrt{ab}$.

Заметим, что $\angle NKB = \angle NPK$ (один из них вписанный, а другой – между касательной и хордой; и оба опираются на дугу KN). Из условия параллельности отрезков AP и KN следует, что $\angle NKB = \angle PAK$ (см. рис. 7). Следовательно, $\angle NPK = \angle PAK$ Кроме того, $\angle KNP = \angle PKA$. Значит, треугольники KNP и PKA подобны. Тогда $KN : KP = KP : AP$, откуда $KP^2 = KN \cdot AP = ab$.

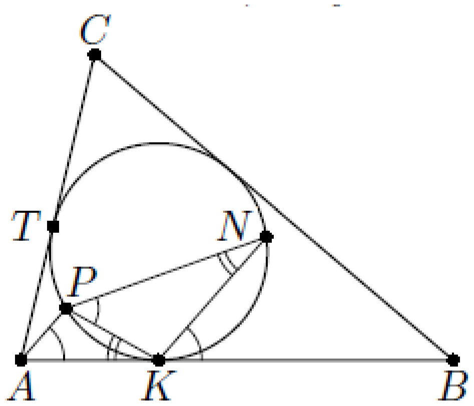

Рис. 7

10.5. Ответ. 8 выстрелов.

Заметим, что если бублик размещен на поле 4×4, то одного выстрела не хватит, чтобы гарантированно его ранить. Действительно, если выстрел произведен в клетку, соседнюю со стороной квадрата, то бублик может быть размещен рядом с противоположной стороной. Если же выстрел произведен в одну из четырех центральных клеток квадрата, то бублик может быть размещен так, что его центр совпадает с клеткой, в которую сделан выстрел. Значит, потребуется сделать не менее двух выстрелов, чтобы гарантированно его ранить.

Разбив поле 8×8 на четыре квадрата 4×4, получим, что для того, чтобы гарантированно ранить бублик, потребуется не менее 8 выстрелов.

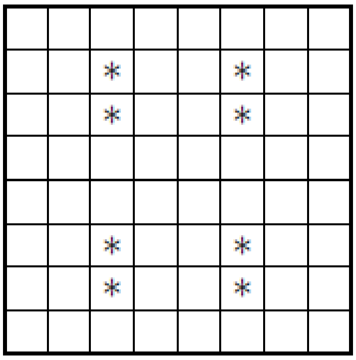

Рис. 8

Если же сделать 8 выстрелов так, как показано на рис. 8, то мы гарантированно раним бублик.

11 класс

11.1. Ответ. $a = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

По теореме Виета, $\sin\beta \cdot 2\cos\beta = 1$, откуда $\sin 2\beta = 1$ и $\beta = \dfrac{\pi}{4} + \pi n$ (n – целое). Отсюда $a = -(\sin\beta + 2\cos\beta) = \pm\dfrac{3}{\sqrt{2}}$. Оба этих значения реализуются (для трехчлена $x^2 + \dfrac{3}{\sqrt{2}}x + 1$ можно положить $\beta = \dfrac{5\pi}{4}$, а для трехчлена $x^2 - \dfrac{3}{\sqrt{2}}x + 1$ – соответственно $\beta = \dfrac{\pi}{4}$). Кроме того, $\sin\beta \neq 2\cos\beta$ при этих значениях β, то есть корни различны.

11.2. Ответ. 10 команд.

Пусть количество команд равно $n+3$. Тогда первые три команды в играх с остальными набрали $3n$ очков, а в играх между собой они набрали 3 очка. Остальные n команд в играх между собой набрали $\dfrac{n(n-1)}{2}$ очков. По условию, $3n + 3 = \dfrac{n(n-1)}{2} + 3$, то есть $n^2 - 7n = 0$. Отсюда получаем, что $n = 7$.

11.3. Перенесем все выражения в левую часть и разложим на множители: $(y-x)(y+x-1) > 0$. Отсюда, с учетом неравенства $y + x < 1$, получаем $y - x < 0$. Тогда доказываемое неравенство принимает вид $(y-x)(y^2 + xy + x^2 - 1) > 0$. Это неравенство верно, так как каждое из трёх первых слагаемых во второй скобке меньше $1/4$, то есть обе скобки принимают отрицательные значения.

11.4. Ответ. 6 вершин.

Покажем, что все 7 вершин параллелепипеда, отличных от отмеченной вершины, не могут находиться от нее на одинаковом расстоянии. Пусть это не так, и расстояния от всех остальных вершин параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ до точки A_1 одинаковы. Опустим из точки A_1 перпендикуляр A_1H на плоскость ABC (см. рис. 9). Тогда треугольники A_1HA, A_1HB, A_1HC, A_1HD будут равны по гипотенузе и катету. Значит, точка H равноудалена от всех вершин грани $ABCD$, то есть параллелограмм $ABCD$ вписан в окружность с центром H, и он – прямоугольник. Тогда прямоугольником является и грань $A_1B_1C_1D_1$. Но в прямоугольнике отрезки A_1B_1 и A_1D_1 короче отрезка A_1C_1, так как гипотенуза в прямоугольном треугольнике больше катета. Значит, все 7 расстояний быть одинаковыми не могут.

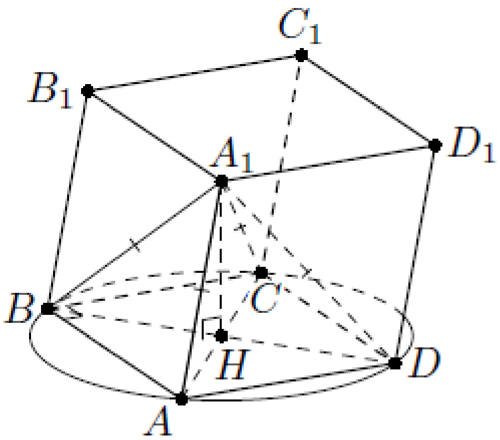

Рис. 9

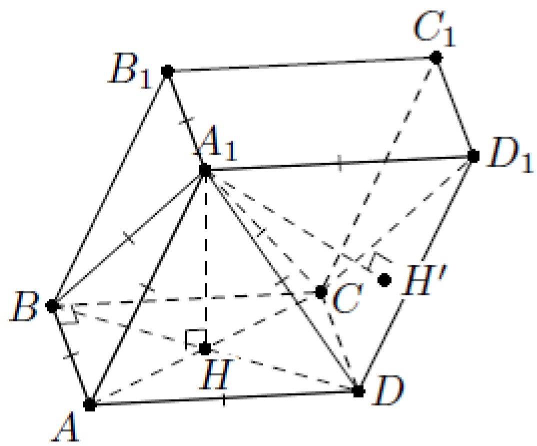

Рис. 10

Осталось привести пример параллелепипеда, в котором вершина A_1 равноудалена от 6 вершин. Возьмем параллелепипед, у которого грани $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ – квадраты со стороной a, и описанная выше точка H является центром квадрата $ABCD$. Пусть длина отрезка A_1H равна $\frac{a}{\sqrt{2}}$ (см. рис. 10). Тогда расстояния от точки A_1 до вершин A, B, C, D равны $\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}} = a$, то есть равны расстояниям от нее до вершин B и D.

Замечание. Тот же пример можно описать и по-другому (рис. 10). Пусть грань CDD_1C_1 – ромб со стороной a, в котором $\angle C = 120^{\circ}$. Разместим грань ABB_1A_1 так, чтобы основание H' перпендикуляра, опущенного из A_1 на плоскость CDD_1C_1, являлось центром правильного треугольника CDD_1, а высоту A_1H' подберем так, чтобы A_1 была равноудалена от точек A, B, B_1, C, D и D_1.

11.5. Ответ. 8 выстрелов.

Заметим, что если бублик размещен на поле 4×4, то одного выстрела не хватит, чтобы гарантированно его ранить. Действительно, если выстрел произведен в клетку, соседнюю со стороной квадрата, то бублик может быть размещен рядом с противоположной стороной. Если же выстрел произведен в одну из четырех центральных клеток квадрата, то бублик может быть размещен так, что его центр совпадает с клеткой, в которую сделан выстрел. Значит, потребуется сделать не менее двух выстрелов, чтобы гарантированно его ранить.

Выделив на поле 10×8 четыре непересекающихся квадрата 4×4, получим, что для того, чтобы гарантированно ранить бублик, потребуется не менее 8 выстрелов.

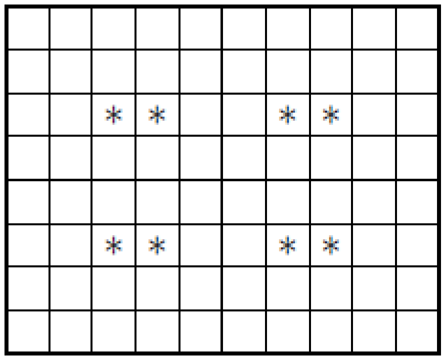

Рис. 11

Если же сделать 8 выстрелов так, как показано на рис. 11, то мы гарантированно раним бублик.

Рекомендуемая литература для подготовки заданий муниципального этапа Всероссийской математической олимпиады

Журналы:

«Квант», «Квантик», «Математика в школе», «Математика для школьников»

Книги и методические пособия:

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Районные олимпиады. 6-11 класс. – М.: Просвещение, 2010.

Агаханов Н.Х., Богданов И.И., Кожевников П.А., Подлипский О.К., Терешин Д.А. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 1. – М.: Просвещение, 2008.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 2. – М.: Просвещение, 2009.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 3. – М.: Просвещение, 2011.

Агаханов Н.Х., Подлипский О.К., Рубанов И.С. Математика. Всероссийские олимпиады. Выпуск 4. – М.: Просвещение, 2013.

Адельшин А.В.,Кукина Е.Г.,Латыпов И.А. и др. Математическая олимпиада им. Г. П. Кукина. Омск, 2007-2009. – М.: МЦНМО, 2011.

Андреева А.Н. ,Барабанов А.И., Чернявский И.Я. Саратовские математические олимпиады.1950/51–1994/95. (2-е. исправленное и дополненное). – М.: МЦНМО, 2013.

Бабинская И.Л. Задачи математических олимпиад. М.: Наука, 1975.

Блинков А.Д., Горская Е.С., Гуровиц В.М. (сост.). Московские математические регаты. Часть 1. 1998– 2006 – М.: МЦНМО, 2014.

Блинков А.Д. (сост.). Московские математические регаты. Часть 2. 2006– 2013 – М.: МЦНМО, 2014.

Генкин С.А., Итенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.

Горбачев Н.В. Сборник олимпиадных задач по математике (3-е изд., стереотип.). – М.: МЦНМО, 2013.

Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник (6-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2011.

Гордин Р.К. Геометрия. Планиметрия. 7–9 классы (5-е издание, стереотипное). – М., МЦНМО, 2012.

Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи (8-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.
Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам (3-е, стереотипное). – М., МЦНМО, 2014.
Козлова Е. Г. Сказки и подсказки (задачи для математического кружка) (7-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2013.
Кордемский Б.А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958 – 576 с.
Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М.: МЦНМО, 2014.

Интернет-ресурс: http://www.problems.ru/